Introducción a la simulación de fluidos (II)

Animación Avanzada

Iván Alduán Íñiguez

27 de Marzo de 2014

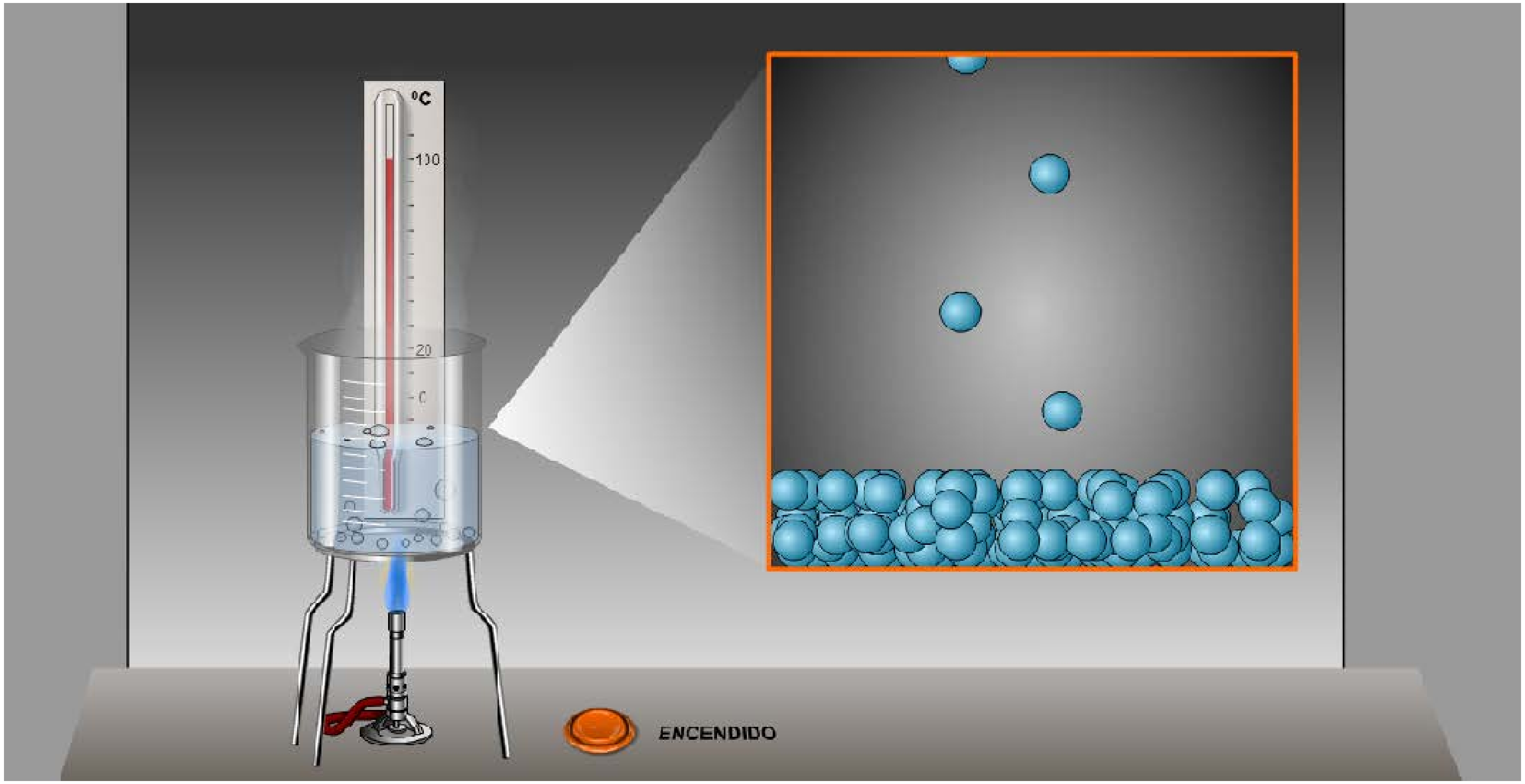
Computer Graphics
Virtual Reality
Games
Master

Índice

- Fluidos en el continuo
- Leyes de conservación
- Método de paso fraccionado
- Advección
- Viscosidad
- Fuerzas de volumen

Fluidos en el continuo

- Estados de la materia:



Fluidos en el continuo

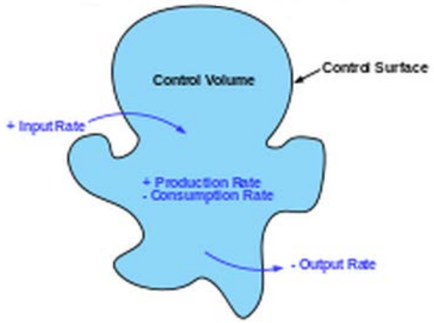
- Se denomina **fluido** a un tipo de medio continuo formado por una sustancia entre cuyas moléculas sólo hay una fuerza de atracción débil.
- La propiedad definitoria de los fluidos es que pueden cambiar de forma sin que aparezcan en su seno fuerzas restitutivas tendentes a recuperar la forma original (principal diferencia con un sólido deformable).
- Los líquidos toman la forma del recipiente que los aloja, manteniendo su propio volumen, mientras que los gases carecen tanto de volumen como de forma propias.

Fluidos en el continuo

- Las moléculas en un fluido están en constante desplazamiento: no podemos simular todas ellas!
- Los físicos nos proponen diferentes niveles de aproximación para describir el mundo real: subatómico, atómico o molecular, microscópico, macroscópico (mecánica clásica) y astronómico.
- En simulación:
  - Descripción estadística de un gas, el movimiento de cada átomo importa: Boltzmann
  - **Mecánica del continuo**, el comportamiento en bloque domina sobre el individual: Navier-Stokes

Fluidos en el continuo

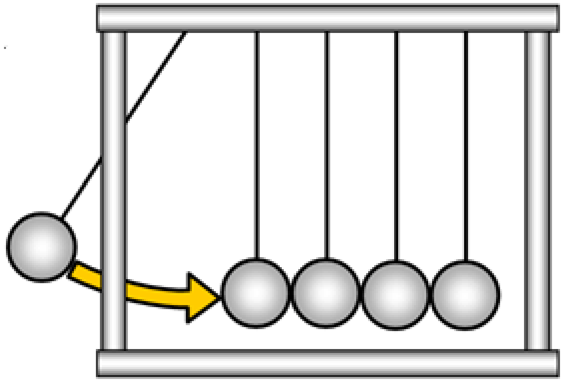
- Un **elemento de fluido** en la aproximación de la mecánica de medios continuos representa a todas las moléculas individuales que se encuentran dentro de un volumen de control.
- Asumimos que la dinámica y choques de cada molécula no importa sino que el comportamiento macroscópico se puede definir mediante cantidades 'mediadas' en nuestro elemento como densidad, velocidad, viscosidad, presión.



Leyes de conservación

- Las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido pueden tomar cientos de formas diferentes.
- Todas ellas provienen del concepto fundamental de las **leyes de conservación**.
- Postulan que durante la evolución temporal de un sistema aislado ciertas magnitudes tienen un valor constante.

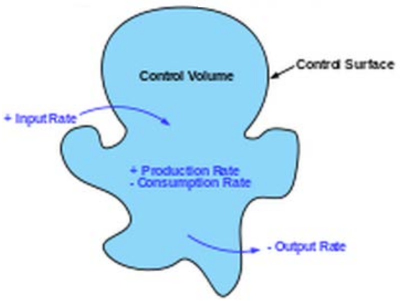
  - Conservación de la masa
  - Conservación del momento
  - Conservación de la energía



Leyes de conservación

- ¿Qué forma tiene una ecuación de conservación?
- La variación del total de una propiedad dentro de un dominio Ω es igual al balance entre lo que sale y lo que entra en el domino, junto con la contribución de posibles fuentes de dicha cantidad.

[variacion] = [lo que entra-lo que sale]+[sources]



Leyes de conservación

- Total de una cantidad U dentro de un dominio:

$$\int_{\Omega} U d\Omega$$

- Variación por unidad de tiempo de dicha cantidad:

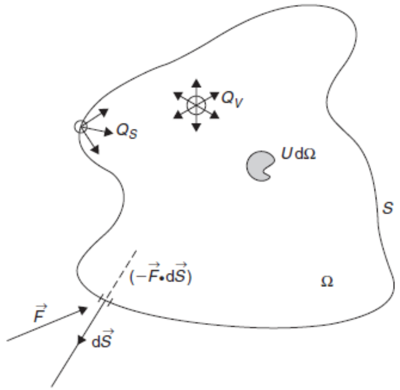
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} U d\Omega$$

- Flujo de U saliendo o entrando en el volumen por unidad de superficie por unidad de tiempo:

$$-\oint_{S} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

- Fuentes de U:

$$\int_{\Omega} Q_V d\Omega$$



Leyes de conservación

- Forma general de una ecuación de conservación:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} U d\Omega = -\oint_{S} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \int_{\Omega} Q_V d\Omega$$

- Convertimos la integral de superficie en una integral de volumen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} U d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{F} d\Omega = \int_{\Omega} Q_V d\Omega$$

- Como la ecuación anterior es válida para cualquier volumen:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = Q_V$$

Leyes de conservación

- El término de flujo representa el intercambio de una propiedad entre elementos vecinos.
- Se distinguen dos tipos de flujo:

$$\vec{F} = \vec{F}_C + \vec{F}_D$$

- Flujo convectivo debido al transporte con el movimiento del fluido.

$$\vec{F}_C = U\vec{v}$$

- Flujo difusivo debido a la agitación molecular, presente incluso en reposo.

$$\vec{F}_D = -\kappa\rho\vec{\nabla}u$$

Leyes de conservación

- **Conservación de la masa**:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho d\Omega+\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})d\Omega=0$$

- Forma diferencial:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v})=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\rho+\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$$

- Para un fluido incompresible (ρ=cte):

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=0$$

La ecuación de conservación de la masa considera que no existe flujo difusivo ya que cualquier movimiento de masa implicaría un transporte del fluido y por lo tanto un flujo convectivo

Leyes de conservación

- **Conservación del momento**:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\rho\vec{v}\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v})\mathrm{d}\Omega=\boxed{\int_{\Omega}\rho\vec{f}_{\mathrm{e}}\,\mathrm{d}\Omega+\oint_{S}\overline{\overline{\sigma}}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

Fuentes de momento:
- proveniente de fuerzas externas
- proveniente de fuerzas internas

- Forma diferencial:

$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}\otimes\vec{v}+p\overline{\overline{I}}-\overline{\overline{\tau}})=\rho\vec{f}_{\mathrm{e}}$$

- Para un fluido incompresible (ρ=cte):

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=-\vec{\nabla}p+\vec{\nabla}\cdot\overline{\overline{\tau}}+\rho\vec{f}_{\mathrm{e}}$$

Término de presión

Término viscoso

Leyes de conservación

- **Conservación del momento**:

- Para un fluido incompresible y viscosidad constante la ecuación de Navier-Stokes se reduce a:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{f}_{\mathrm{e}}$$

- Para un fluido ideal (viscosidad nula) la ecuación de Navier-Stokes se reduce a la eq. de Euler:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f}_{\mathrm{e}}$$

Leyes de conservación

- **Conservación del momento**:

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\rho(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}=-\vec{\nabla}p+\rho\vec{f}_{\mathrm{e}}+\mu\Delta\vec{v}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho\vec{f}_e+\mu\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+\frac{\partial u^2}{\partial y^2}+\frac{\partial u^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho\vec{f}_e+\mu\left(\frac{\partial v^2}{\partial x^2}+\frac{\partial v^2}{\partial y^2}+\frac{\partial v^2}{\partial z^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho\vec{f}_e+\mu\left(\frac{\partial w^2}{\partial x^2}+\frac{\partial w^2}{\partial y^2}+\frac{\partial w^2}{\partial z^2}\right)$$

Método de paso fraccionado

- Las equaciones de Navier-Stokes son ecuaciones no lineales y resolver las ecuaciones completas con todas sus incógnitas a la vez es complicado.
- Esta aproximación se basa en el fraccionamiento de los operadores: podemos dividir una equación complicada en cada una de sus partes y resolver cada una por separado.

$$\frac{dq}{dt} = f(q) + g(q) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \tilde{q} &= q^n + \Delta t f(q^n) \\ q^{n+1} &= \tilde{q} + \Delta t g(\tilde{q}) \end{aligned}$$

- El fraccionamiento de ecuaciones introduce una fuente de error adicional.

Método de paso fraccionado

- En el ejemplo anterior realmente no hemos hecho nada nuevo a resolver la ecuación entera con Euler explícito.
- Pero imaginaros que tenemos diferentes métodos con muy buenas propiedades para resolver cada una de las ecuaciones por separado, o que algunos pasos nos interesa resolverlos de manera explícita y otros de manera implícita.
- Esta es realmente la gran ventaja del fraccionado!

$$\tilde{q} = \mathtt{F}(\Delta t, q^n)$$

$$q^{n+1} = \mathtt{G}(\Delta t, \tilde{q})$$

Esquema de un simulador básico en gráficos

- La idea es usar el concepto de método de paso fraccionado en la ecuacion de Navier-Stokes para un fluido incompresible y viscosidad constante.
- Por cada paso de tiempo,
  1. Integramos el término convectivo con un método semi-lagrangiano.
  2. Integramos el término viscoso mediante diferencias finitas de manera explícita.
  3. Añadimos la contribución de la gravedad.
  4. Calculamos las presiones necesarias de manera implícita para que, tras aplicar el término de presión el fluido sea incompresible.

Esquema de un simulador básico en gráficos

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}_{1} = \underbrace{-\vec{\nabla} p}_{4} + \underbrace{\mu \Delta \vec{v}}_{2} + \underbrace{\rho \vec{f}_{\mathrm{e}}}_{3}$$

1. Advección

- Cualquier cantidad definida en un fluido se transporta con el propio movimiento del fluido.
- Este comportamiento se refleja en el término convectivo de las ecuaciones de conservación.
- En fluidos llamamos advección o convección a la resolución del **término convectivo** de las ecuaciones de Navier-Stokes.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$$

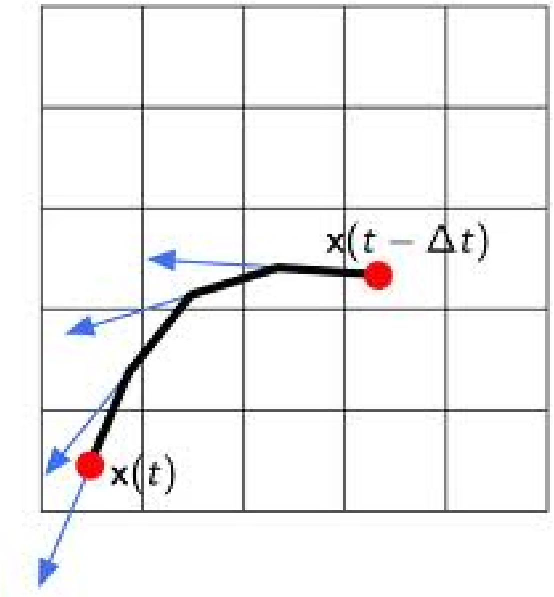
- En este caso transportamos la velocidad del fluido, con su propia velocidad!

1. Advección

- Podríamos aproximar el término por diferencias finitas de cualquier tipo.
- Problema:
  - En gráficos usamos pasos de tiempo grandes
  - Este término es no lineal y podemos sufrir inestabilidades si no tenemos cuidado.
- Solución:
  - Utilizar un esquema que nos garantice que nuestra simulación permanece estable a lo largo del tiempo (incondicionalmente estable).
  - Esquema de advección semi-lagrangiano!

1. Advección

- Idea intuitiva: en vez de integrar hacia adelante miramos hacia atrás.
  ¿Cuál es la posición en el estado actual que tras ser transportada hacia adelante caerá justo sobre el punto que estamos integrando?
- Trazamos el camino que recorrería una partícula hasta llegar a la posición actual de manera inversa.
- Interpolamos la cantidad en la posición final resultante
- Ese es nuestro resultado en t+!



1. Advección

- Integramos el camino que recorrería una partícula hasta llegar a la posición actual de manera inversa.

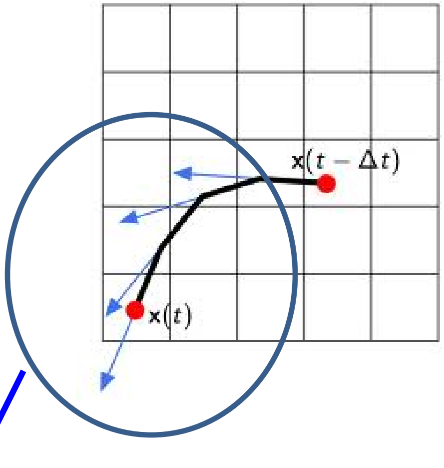
$$x(t-\Delta t) = \mathrm{x}_{ij}(t) - \Delta t * u_{ij}$$

- Interpolamos la cantidad en la posición resultante:

$$u(x(t-\Delta t), t) = \text{interpolate}\, u(x(t-\Delta t))$$

- Ese sample al ser integrado en el tiempo se transportará hasta x_{ij}

$$u(t+\Delta t) = u(x(t-\Delta t), t)$$



Podemos usar substeps para trazar un camino inverso más exacto

1. Advección

- Este método es sencillo de implementar y nos asegura estabilidad, porque cualquier cantidad en el paso siguiente va a ser resultado de una interpolación de las cantidades actuales.
  - Nunca crecen indefinidamente!
- Problemas:
  - Este método disipa demasiado.
- Consejos:
  - Utilizar un esquema de al menos segundo orden para calcular la trayectoria inversa.
  - Utilizar interpolación cuadrática en vez de lineal

2. Viscosidad

- Siempre que la viscosidad del fluido sea pequeña será suficiente con tratar el término viscoso mediante una aproximación por diferencias finitas de manera explícita.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mu \Delta \vec{v}$$

- Desarrollamos la fórmula para la primera componente de la velocidad en 2D:

$$u_{ij}^{*} = u_{ij} + \frac{\Delta t}{\rho} \mu \left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{\Delta x^{2}} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{\Delta y^{2}} \right)$$

2. Viscosidad

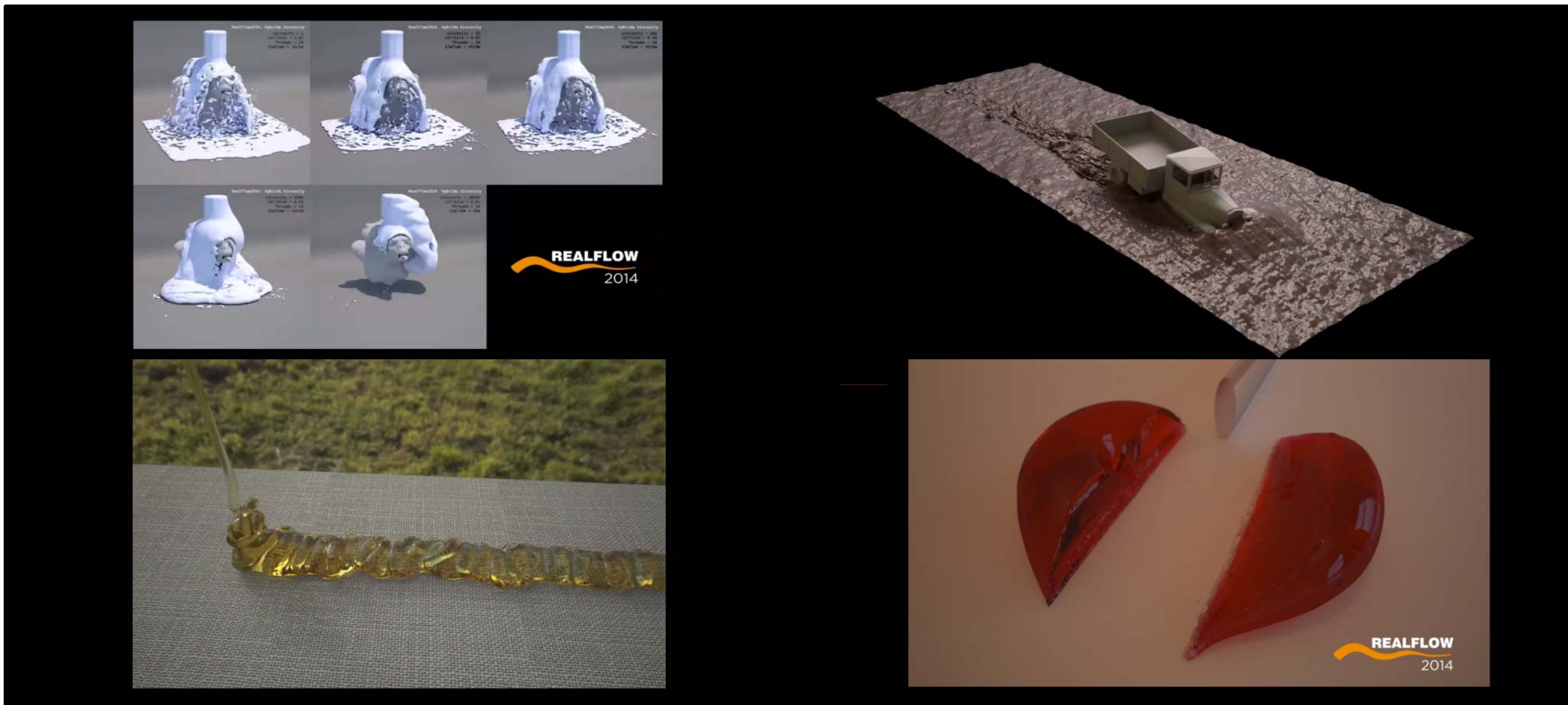
- ¿Qué pasa si queremos fluidos muy viscosos?

- La integración explícita ya no es una opción si queremos manejar coeficientes de viscosidad muy elevados
- Nuestro sistema se vuelve inestable!

- Solución:
  - aplicar un esquema de diferencias finitas implícito
  - y resolver el sistema de ecuaciones lineales resultante para calcular las nuevas velocidades.

2. Viscosidad

- Ejemplos viscosidad implicita:



3. Fuerzas de volumen

- Las fuerzas de volumen o fuerzas externas engloban términos que actúan sobre todo el volumen del fluido.
- Ejemplos: gravedad, empuje, ...

- Su incorporación en el solver fraccionado es muy sencilla, mediante integración por Euler explícito:

$$\vec{u}^{*} = u^{n} + \frac{\Delta t}{\rho} \vec{f}_{e} \rho$$