

Resolución de Contacto

Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada
25 de Febrero de 2014

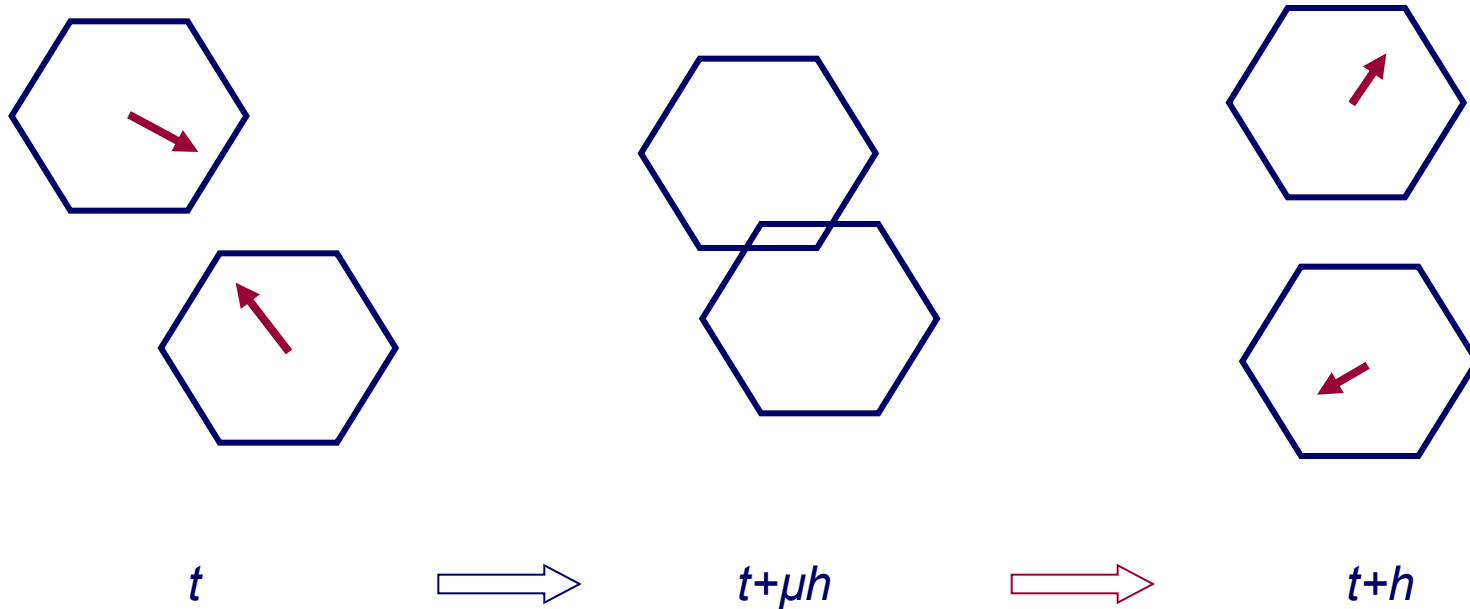


Índice

- Objetivos y métodos de la respuesta a colisiones
- Ejemplos de bucles de simulación.
- Fuerzas de penalty.
- Impulsos; impulsos en sólidos rígidos.
- Fricción de Coulomb.
- Contacto por restricciones fuertes.



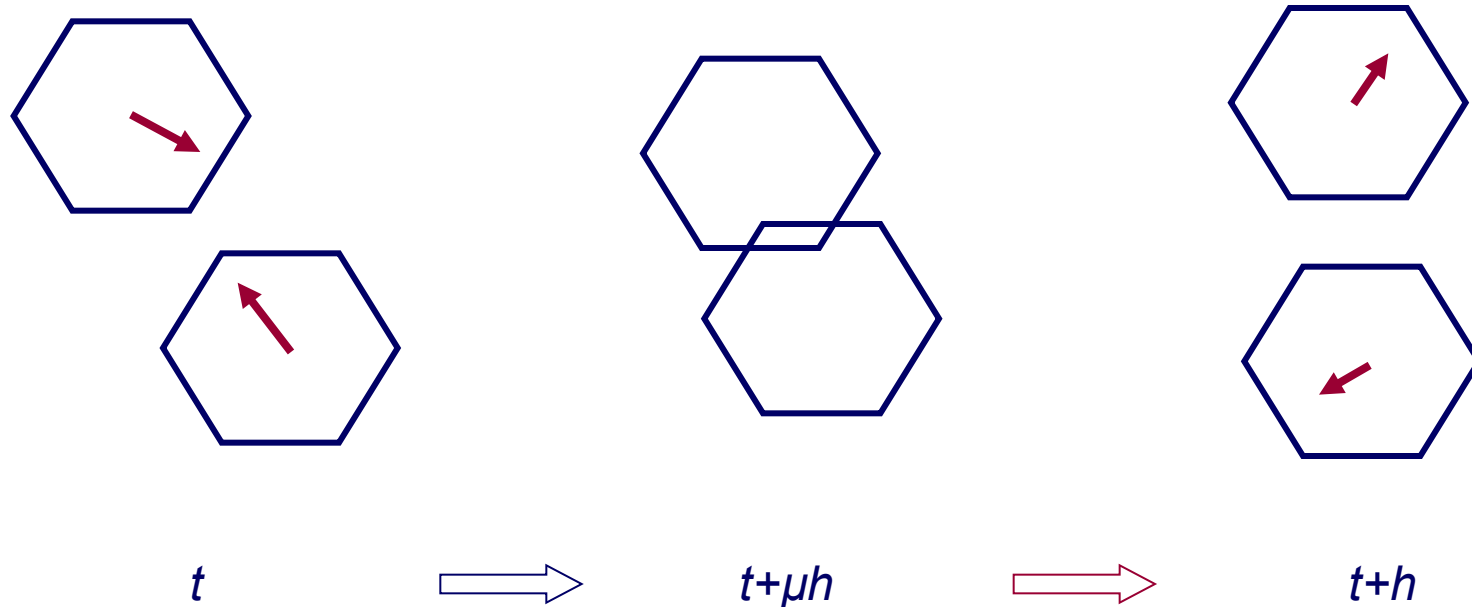
Respuesta a Colisiones



Objetivos:

- Que los objetos no penetren
- Que los objetos reboten
- Modelar la fricción

Respuesta a Colisiones



¿Cómo se puede conseguir? (Todo son restricciones)

- Proyectando posiciones para evitar intersección
- Modificando el sentido de velocidades (impulsos)
- Fuerzas por restricciones débiles (penalty)
- Fuerzas por restricciones fuertes

Bucle de Simulación 1: Fuerzas de Penalty

while(true)

Detección de colisiones

Formular fuerzas de colisiones

Formular fuerzas internas

Integrar velocidades y posiciones

Avanzar el tiempo dt



Bucle de Simulación 2: Proyección

while(true)

 Calcular fuerzas internas

 Integrar velocidades y posiciones

 Detección de colisiones

 Proyectar posiciones de puntos en colisión

 Avanzar el tiempo dt



Bucle de Simulación 3: Restricciones

while(true)

Calcular fuerzas internas

Integrar velocidades y posiciones

Detección de colisiones

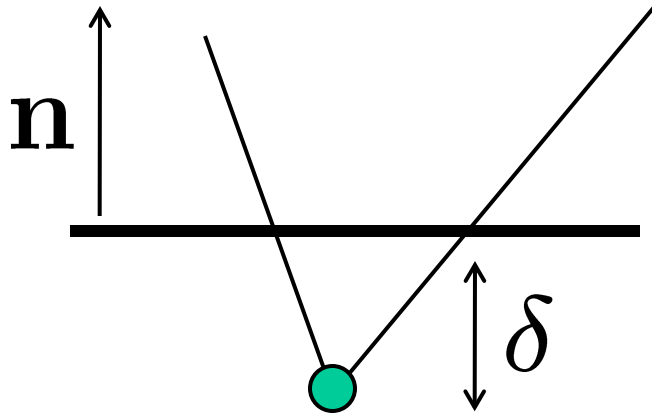
Formular restricciones

Recalcular velocidades/posiciones

Avanzar el tiempo dt



Fuerzas de Penalty



$$\mathbf{F} = k \delta \mathbf{n}$$

Se puede interpretar como una fuerza elástica proporcional a la profundidad de penetración

Opciones:

- Una única fuerza para todo el objeto
- Una fuerza por vértice que penetra
- Muestrear los triángulos y calcular una fuerza por muestra que penetra

Fuerzas de Penalty

Proviene de una energía:

$$E = \frac{1}{2} k \delta^2, \quad \mathbf{F} = -\nabla E, \quad \nabla \delta = -\mathbf{n}$$

Opción 1: Normal del objeto en el que se penetra

- Garantiza que la fuerza deshace la colisión
- Sufre discontinuidades

Opción 2: Normal (negada) del punto que penetra

- Es continua
- No garantiza una fuerza "hacia afuera"



Distribución de Fuerzas

- Si tenemos una fuerza aplicada en un punto p , cómo se distribuye a los grados de libertad x ?

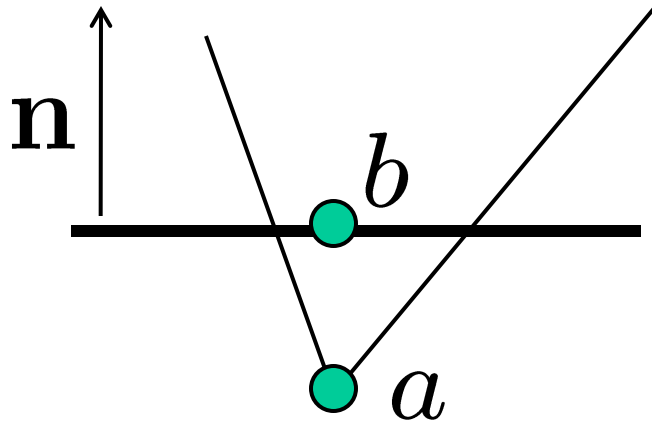
- Relación de velocidades:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}$$

- Relación de fuerzas:

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{F}_p$$

Impulsos



Puramente elástico: $\epsilon = 1$

Puramente inelástico: $\epsilon = 0$

1. Calcular la velocidad relativa $\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b$
2. Calcular la velocidad relativa normal $v_n = \mathbf{n}^T \mathbf{v}_{rel}$
3. Calcular el impulso en función del coeficiente de restitución $J_n = -(1 + \epsilon)v_n$
4. Aplicar el impulso y modificar la velocidad

Impacto en Sólidos Rígidos

- Impulso (instantáneo):

$$\mathbf{j}_a = j\mathbf{n} \quad \mathbf{j}_b = -j\mathbf{n}$$

- Variación del momento:

$$m_a \mathbf{v}_a = m_a \mathbf{v}_{a,0} + j\mathbf{n} \quad \mathbf{M}_a \boldsymbol{\omega}_a = \mathbf{M}_a \boldsymbol{\omega}_{a,0} + (\mathbf{R}_a \mathbf{r}_a) \times (j\mathbf{n})$$

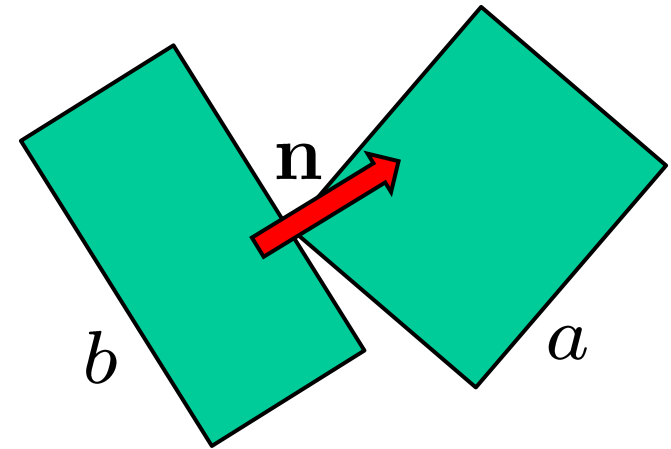
$$m_b \mathbf{v}_b = m_b \mathbf{v}_{b,0} - j\mathbf{n} \quad \mathbf{M}_b \boldsymbol{\omega}_b = \mathbf{M}_b \boldsymbol{\omega}_{b,0} - (\mathbf{R}_b \mathbf{r}_b) \times (j\mathbf{n})$$

- Coeficiente de restitución:

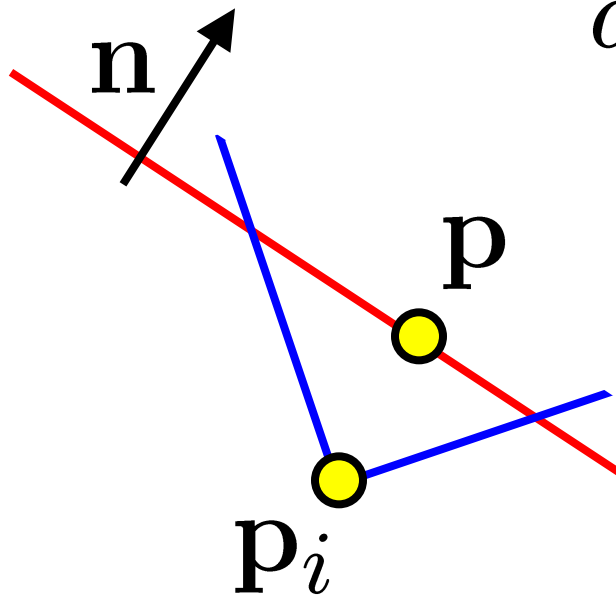
$$\mathbf{n}^T \mathbf{v}_{rel} = -\epsilon \mathbf{n}^T \mathbf{v}_{rel,0}$$

- Juntándolo todo:

$$j = \frac{-(1+\epsilon)\mathbf{n}^T \mathbf{v}_{rel,0}}{\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \mathbf{n}^T \left(\mathbf{M}_a^{-1} ((\mathbf{R}_a \mathbf{r}_a) \times \mathbf{n}) \right) \times (\mathbf{R}_a \mathbf{r}_a) + \mathbf{n}^T \left(\mathbf{M}_b^{-1} ((\mathbf{R}_b \mathbf{r}_b) \times \mathbf{n}) \right) \times (\mathbf{R}_b \mathbf{r}_b)}$$



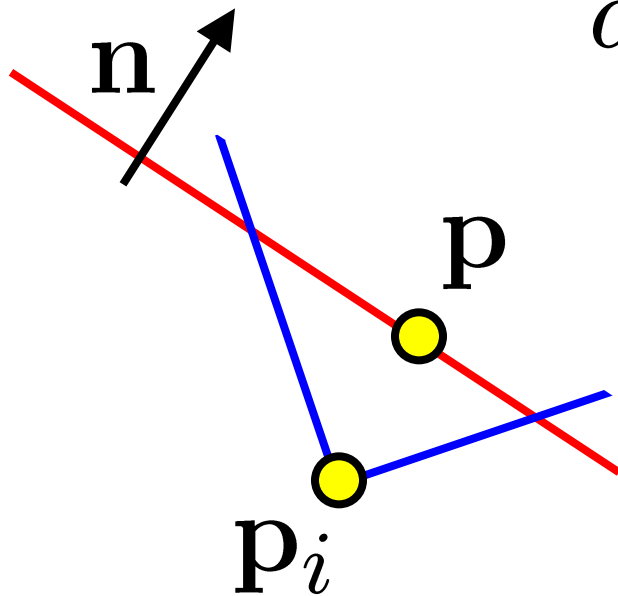
Contacto mediante Restricciones



$$d_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

Definición de una restricción:
Distancia positiva.

Contacto mediante Restricciones



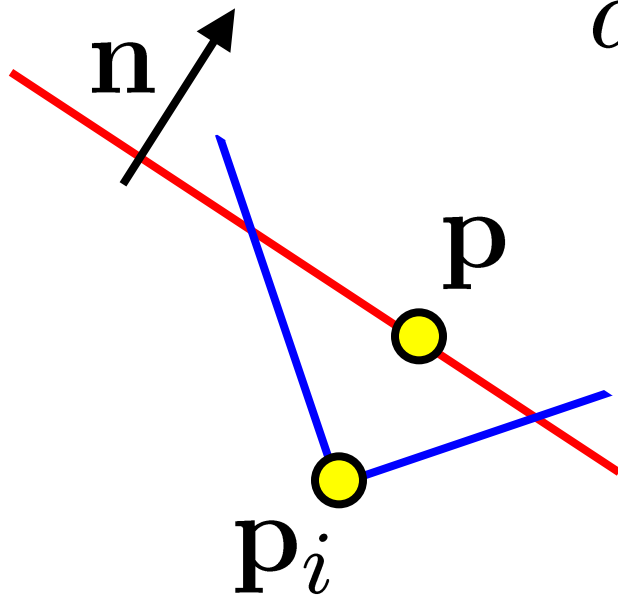
$$d_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{n}$$

$$\lambda_i \geq 0$$

Fuerza normal, multiplicador de Lagrange.
Además, no puede ser fuerza atractora!

Contacto mediante Restricciones



$$d_i = \mathbf{n}^T (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}) \geq 0$$

$$\mathbf{F}_i = \lambda_i \mathbf{n}$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$d_i \cdot \lambda_i = 0$$

Complementareidad:

- a) La distancia es 0.
- b) La fuerza es 0.

Ambas no pueden ser positivas a la vez!

Contacto mediante Restricciones

- Por un lado, las ecuaciones dinámicas
- Por otro, las restricciones (inecuaciones)

- Aplicar los métodos de restricciones fuertes típicos

Contacto mediante Restricciones

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda}$$

$$\mathbf{J}\mathbf{v} \geq \mathbf{d}$$

$$\boldsymbol{\lambda} \geq 0$$

$$\boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{J}\mathbf{v} - \mathbf{d}) = 0$$

LCP = (Mixed) Linear Complementarity Problem

Para unir las restricciones de contacto a las ecuaciones dinámicas:

- Derivar las restricciones y expresarlas sobre aceleraciones.
- Integrar las ecuaciones dinámicas y las restricciones, expresando ambas sobre velocidades.



Contacto mediante Restricciones

Conversión del MLCP a un LCP puro:

$$\mathbf{B}\lambda \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{J}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{J}^T, \quad \mathbf{c} = \mathbf{d} - \mathbf{J}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Se puede resolver, p.ej., por Gauss-Seidel proyectado

- Se resuelve cada λ_i asumiendo el resto fijos, y tomando su ecuación como igualdad en lugar de inecuación
- Si $\lambda_i < 0$, se proyecta a 0.
- Se itera hasta converger

Paralelizable con red-black Gauss-Seidel
Converge lento bajo muchas restricciones

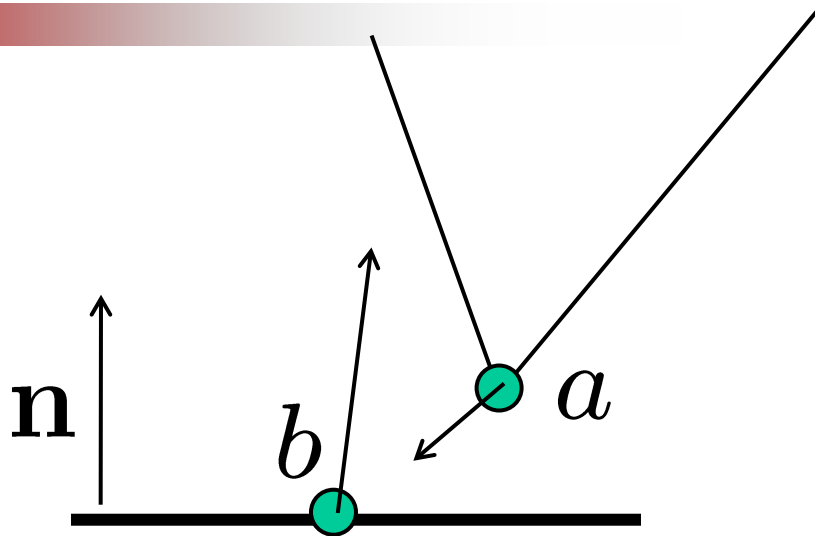


Resumen de Métodos

- El método de penalty es barato con integración explícita; con implícita requiere resolver sistemas lineales grandes.
- Aplicar restricciones sobre velocidades es equivalente a aplicar impulsos, y se usa con sólidos rígidos que sufren impactos.
- Aplicar restricciones sobre posiciones con integración explícita es equivalente al método de proyección, y se usa con ropa.
- Restricciones fuertes con integración implícita es muy costoso, pero da muy buen resultado.



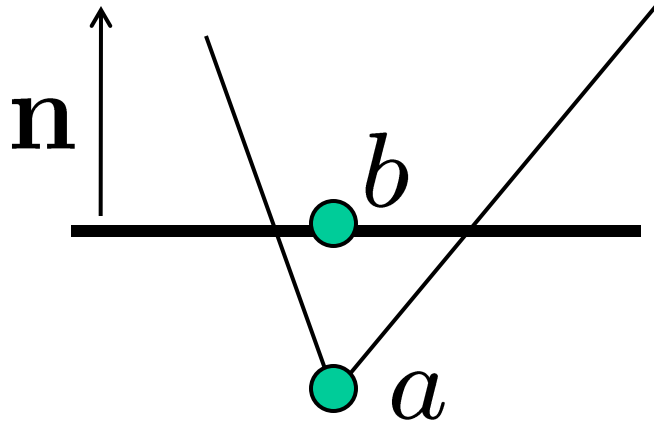
Fricción de Coulomb



Modelo de Coulomb: la fricción trata de minimizar la velocidad tangencial relativa, pero la fuerza aplicada no puede ser mayor que una fracción de la fuerza normal.

$$\min(\mathbf{I} - \mathbf{nn}^T)(\mathbf{v}_a - \mathbf{v}_b), \quad \|\mathbf{F}_t\| \leq \mu F_n$$

Fricción de Coulomb: Impulsos



1. Calcular el impulso máximo $J_t = \mu \cdot J_n$
2. Si el impulso máximo no disipa toda la velocidad tangencial, aplicar el impulso máximo (En la dirección de la velocidad tangencial relativa)
3. Si el impulso máximo cambia de dirección la velocidad tangencial, aplicar en su lugar el impulso tal que anula la velocidad.

Fricción de Coulomb: Penalty

Cuando hay una colisión, se crea un punto 'ancla', y se introduce un muelle respecto a ese punto.

- Si la fuerza del muelle no supera el límite de Coulomb, el ancla se mantiene fija.
- Si la fuerza supera el límite, el ancla sigue al punto a la distancia que da la fuerza límite.



Fricción de Coulomb: Restricciones

- Definir multiplicadores de Lagrange para la fuerza de Coulomb en el plano tangente al contacto
- Calcular los multiplicadores que minimizan las velocidades relativas, sujetos a la restricción dada por μ .

No se pueden resolver fricción y fuerza normal a la vez; la fricción depende de la fuerza normal

- a) Calcular la fricción para cada contacto dentro del Gauss-Seidel proyectado tras calcular fuerza normal
- b) Calcular todas las fuerzas normales primero, todas las fricciones después. E iterar.

