FEM para Mecánica 3D

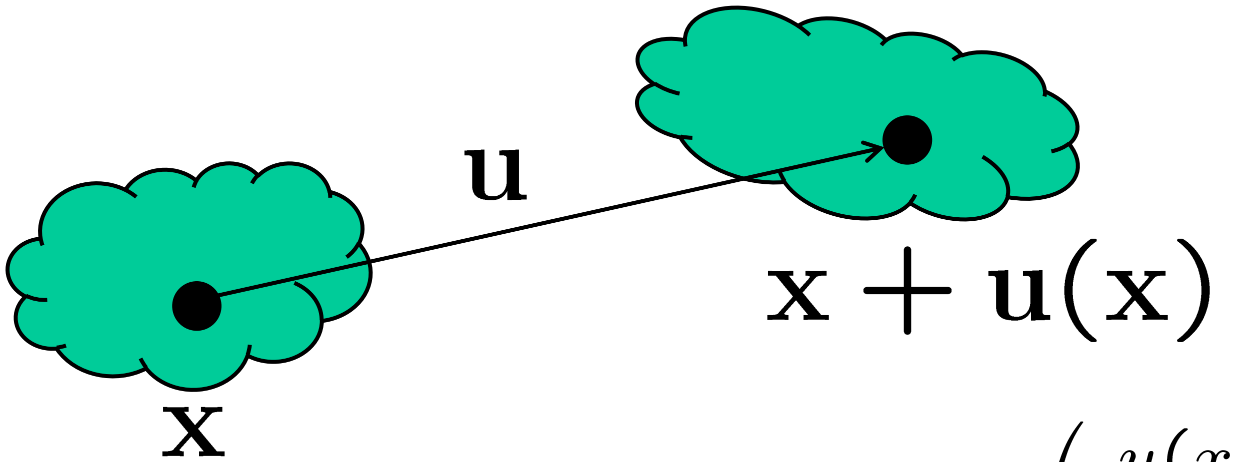
Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada
7 de Marzo de 2014

Índice

- Repaso
  - Funciones de forma
  - Formulación fuerte → formulación débil
  - Matriz de rigidez
- Hoy
  - Ec. de elasticidad en 3D
  - Deformación (strain) y tensión (stress) en 3D
  - Materiales lineales isotrópicos
  - Ritz-Galerkin en 3D
  - Problema FEM estático
- La semana que viene
  - Dinámica
  - Simulación de grandes rotaciones
  - Plasticidad
  - Fractura

Elasticidad 3D



Desplazamiento $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(x,y,z) \\ v(x,y,z) \\ w(x,y,z) \end{pmatrix}$

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_b = 0$$

Fuerza interna: divergencia de la tensión (stress)
Fuerza externa: fuerzas de masa (body forces)

Formas de medir la deformación

- Posición deformada:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

- Gradiente de deformación:

$$\nabla \mathbf{x}' = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$$

- Tensor de Green:

$$\epsilon_G = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})$$

- Tensor de Cauchy:

$$\epsilon_C = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$$

Tensor de Cauchy

- Evaluación del tensor de cauchy:

$$\epsilon_C = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y + v_x & u_z + w_x \\ v_x + u_y & v_y & v_z + w_y \\ w_x + u_z & w_y + v_z & w_z \end{pmatrix}$$

Es lineal, simétrico, y con 6 valores distintos (Hay un cambio de escala de algunos valores que no es relevante).

Deformación de Cauchy en forma de vector

- Desplegando en un vector 6D:

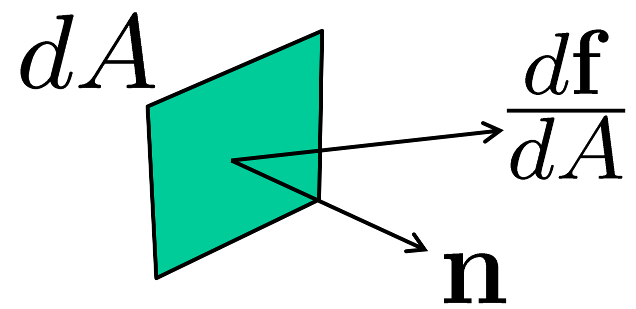
$$\epsilon_C = \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{u}$$

Se puede expresar como un operador lineal que deriva el desplazamiento.

Tensor de Tensión

- La tensión es un tensor simétrico:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$



La tensión es la magnitud que permite calcular la presión interna en cualquier dirección.

$$\frac{d\mathbf{f}}{dA} = \sigma \cdot \mathbf{n} \qquad f_{\mathbf{n}} = A\mathbf{n}^T \sigma \cdot \mathbf{n}$$

Material lineal isotrópico

- Un material lineal relaciona de manera lineal tensión y deformación (equivalente 3D de la ley de Hooke):

$$\sigma = \mathbf{E}\epsilon$$

E: Tensor 3x3x3x3

Material lineal isotrópico (usando vectores 6D):

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\nu)c & \nu c & \nu c & 0 & 0 & 0 \\ \nu c & (1-\nu)c & \nu c & 0 & 0 & 0 \\ \nu c & \nu c & (1-\nu)c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}$$

Al usar vectores 6D, E: Matriz 6x6

Parámetros del material

- Dos parámetros para materiales lineales isotrópicos:
  - Módulo de Young (E). Relaciona la magnitud de deformación con la magnitud de fuerza. Indica la rigidez del material.
  - Coeficiente de Poisson (ν). Relaciona la deformación en direcciones ortogonales. Indica la compresibilidad del material. Un material con $\nu = 0.5$ conserva el volumen.

$$c = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Conclusiones (por ahora)

- Hemos desarrollado una posible formulación de la fuerza interna:
  - Tensor de deformación de Cauchy (Linealidad geométrica)
  - Relación lineal deformación-tensión (Material lineal)
- Hay múltiples posibles definiciones, utilizando relaciones deformación-tensión no-lineales (modelo constitutivo), u otras métricas de la deformación (p.ej., el gradiente de deformación).

Elasticidad: Formulación fuerte

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_b = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

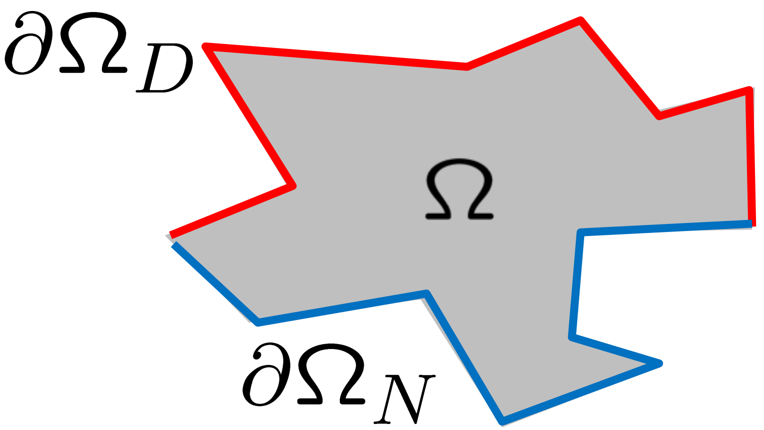
Las densidades de fuerza interna y externa han de estar en equilibrio en todo el volumen.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_D, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_D$$

Cond. de contorno de Dirichlet (desplazamientos).

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_N, \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_N$$

Cond. de contorno de Neumann (fuerzas).



Todo punto del contorno ha de tener una condición de desplazamiento (Dirichlet) o fuerza (Neumann).

Método de Galerkin

- La ecuación diferencial se multiplica por una función de test (arbitraria) y se integra en el dominio.

$$\int_\Omega \tilde{\mathbf{u}}^T(\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_b)d\Omega = 0$$

- La solución es independiente de la función de test. Más adelante se verá que la podemos eliminar.

Teorema de Green

- Aplicamos el teorema de Green:

$$\int_\Omega \tilde{\epsilon}^T \sigma d\Omega = \int_\Omega \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_b d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}_N d\partial\Omega$$

- Esto da lugar a la formulación débil.
- En la formulación fuerte aparece la derivada segunda del desplazamiento. En la débil, sólo aparece la primera derivada.

Eliminación de la función de test

- Aproximamos la función de test por el método de los elementos finitos:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\bar{\mathbf{u}} \qquad \tilde{\epsilon} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{S}\mathbf{N}\bar{\mathbf{u}}$$

$$\bar{\mathbf{u}}^T(\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{S}^T\sigma d\Omega = \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{f}_b d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}^T\mathbf{f}_N d\partial\Omega)$$

- Eliminando la función de test, se obtiene:

$$\int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{S}^T\sigma d\Omega = \int_\Omega \mathbf{N}^T\mathbf{f}_b d\Omega + \int_{\partial\Omega_N} \mathbf{N}^T\mathbf{f}_N d\partial\Omega$$

Matriz de rigidez

- Nos vamos a fijar sólo en el término que da lugar a la matriz de rigidez

$$\int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T \sigma d\Omega$$

- Por las definiciones de tensión y deformación:

$$\int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T \mathbf{E} \epsilon d\Omega = \int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T \mathbf{E} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega$$

- Aproximando el desplazamiento por FEM:

$$\int_\Omega \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T \mathbf{E} \mathbf{S} \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} d\Omega$$

Matriz de rigidez (2)

- La integral se puede expresar como la suma de integrales en los elementos. Entonces, las funciones de forma son continuas en cada integral.

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \mathbf{N}_i^T \mathbf{S}^T \mathbf{E} \mathbf{S} \mathbf{N}_i \bar{\mathbf{u}} d\Omega$$

- Como las funciones de forma son lineales (coord. baricéntricas), su derivada es constante.

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \mathbf{B}_i^T \mathbf{E} \mathbf{B}_i \bar{\mathbf{u}} d\Omega$$

- El vector nodal de desplazamientos se puede sacar de la integral. También se puede sacar la matriz del material (constante por cada elemento):

$$\left(\sum_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{E}_i \mathbf{B}_i \int_{\Omega_i} d\Omega\right) \bar{\mathbf{u}} = \left(\sum_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{E}_i \mathbf{B}_i V_i\right) \bar{\mathbf{u}}$$

Matriz de rigidez (3)

- La matriz de rigidez se puede expresar como suma de matrices de rigidez por elemento:

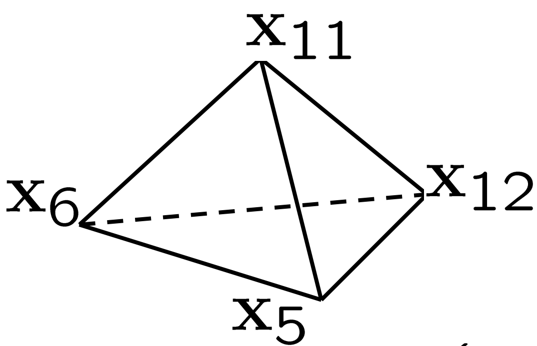
$$\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = \sum_i \mathbf{K}_i \bar{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{K}_i = \mathbf{B}_i^T \mathbf{E}_i \mathbf{B}_i V_i$$

- La matriz de cada elemento tiene 4x4 bloques de tamaño 3x3 distintos de 0. Las matrices se calculan en cada elemento y luego se ensambla la matriz completa.

Matriz por Elemento

- El desplazamiento en un elemento se aproxima a partir del vector nodal de desplazamientos y las funciones de forma:



$$\mathbf{u} = \mathrm{N}_i \bar{\mathbf{u}}$$

$$\mathbf{u} = (\ldots 0 \ldots \mathrm{N}_5 \mathrm{N}_6 \ldots 0 \ldots \mathrm{N}_{11} \mathrm{N}_{12} \ldots 0 \ldots)_{3\times 3n}\, \bar{\mathbf{u}}_{3n\times 1}$$

- Las funciones de forma tienen coordenadas baricéntricas en la diagonal. Las coordenadas baricéntricas son una función lineal de la posición.

Matriz por Elemento (2)

- Definimos la deformación de Cauchy en el elemento derivando el desplazamiento:

$$\epsilon_{6\times 1} = \mathbf{S}_{6\times 3}\mathbf{u}_{3\times 1} = \mathbf{S}_{6\times 3}\mathbf{N}_{3\times 3n}\bar{\mathbf{u}}_{3n\times 1}$$

- Como las coordendas baricéntricas son lineales, el resultado de derivar la matriz de funciones de forma es una matriz constante en cada elemento.

$$\mathbf{B}_{6\times 3n} = \mathbf{S}_{6\times 3}\mathbf{N}_{3\times 3n}$$

- En 3D, esta matriz tiene 4 bloques de tamaño 6x3 distintos de 0 por cada elemento. Al multiplicar $B^T EB$ en la matriz de rigidez del elemento, resultan los 4x4 bloques distintos de 0.