

FEM para Animación de Deformaciones

Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada
13 de Marzo de 2014



Índice

- Repaso
 - Ec. de elasticidad en 3D
 - Ritz-Galerkin en 3D
 - Problema FEM estático
- Hoy
 - Dinámica
 - Simulación de grandes deformaciones
 - Plasticidad
 - Fractura

Elasticidad + Dinámica

- Formulación fuerte: problema estático.

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_b = 0$$

- Formulación fuerte: problema dinámico. Se añade la fuerza de inercia.

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_b - m\mathbf{a} = 0$$

↑
Densidad

- El resultado es la 2ª ley de Newton en el continuo.

Ecuación Dinámica

- Al aplicar el método de Galerkin, el término de inercia se integra en los elementos.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{M} = \sum_i \int_{\Omega_i} m \mathbf{N}_i^T \mathbf{N}_i d\Omega$$

- Otra opción: concentrar la masa en los nodos (*mass lumping*), dando lugar a una matriz diagonal. La masa de los nodos se puede calcular repartiendo la masa de cada tetraedro entre sus nodos.

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_i)$$



Amortiguamiento

- Se podría modelar mediante una fuerza en el continuo, dependiente de la derivada de la deformación (*strain rate*). Da lugar a una matriz de amortiguamiento.
- Es habitual aplicar un modelo concentrado en los nodos y aristas (amortiguamiento de Rayleigh):

$$\mathbf{f}_d = -\mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{D} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$$

- El amortiguamiento de Rayleigh tiene una parte que corresponde con velocidades de nodos, y una parte que corresponde con velocidades relativas.



Integración Numérica

- Se puede aplicar cualquiera de los métodos de integración usados con masa-muelle.
- Euler explícito. Las fuerzas elásticas se evalúan en función de las deformaciones del paso previo.
$$\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta t \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f} - \mathbf{K} \mathbf{u}_i - \mathbf{D} \mathbf{v}_i)$$
- Euler implícito. Se ha de resolver un sistema lineal.
$$\mathbf{A} \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{b}, \mathbf{A} = \mathbf{M} + \Delta t \mathbf{D} + \Delta t^2 \mathbf{K}$$
- La matriz del sistema es dispersa, simétrica y definida positiva. Se puede resolver por gradiente conjugado, factorización de Cholesky...



Ventajas de FEM

- Las características del material vienen definidas por propiedades locales (módulo de Young, coeficiente de Poisson)...
- La solución es independiente del mallado (Suponiendo suficiente resolución).

Grandes Deformaciones

- Opción 1: Usar el tensor de deformación de Green.

$$\epsilon_G = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})$$

- Material lineal con tensor de Green: Modelo de St. Venant – Kirchhoff (StVK).

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\sigma = \lambda \cdot \text{traza}(\epsilon) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

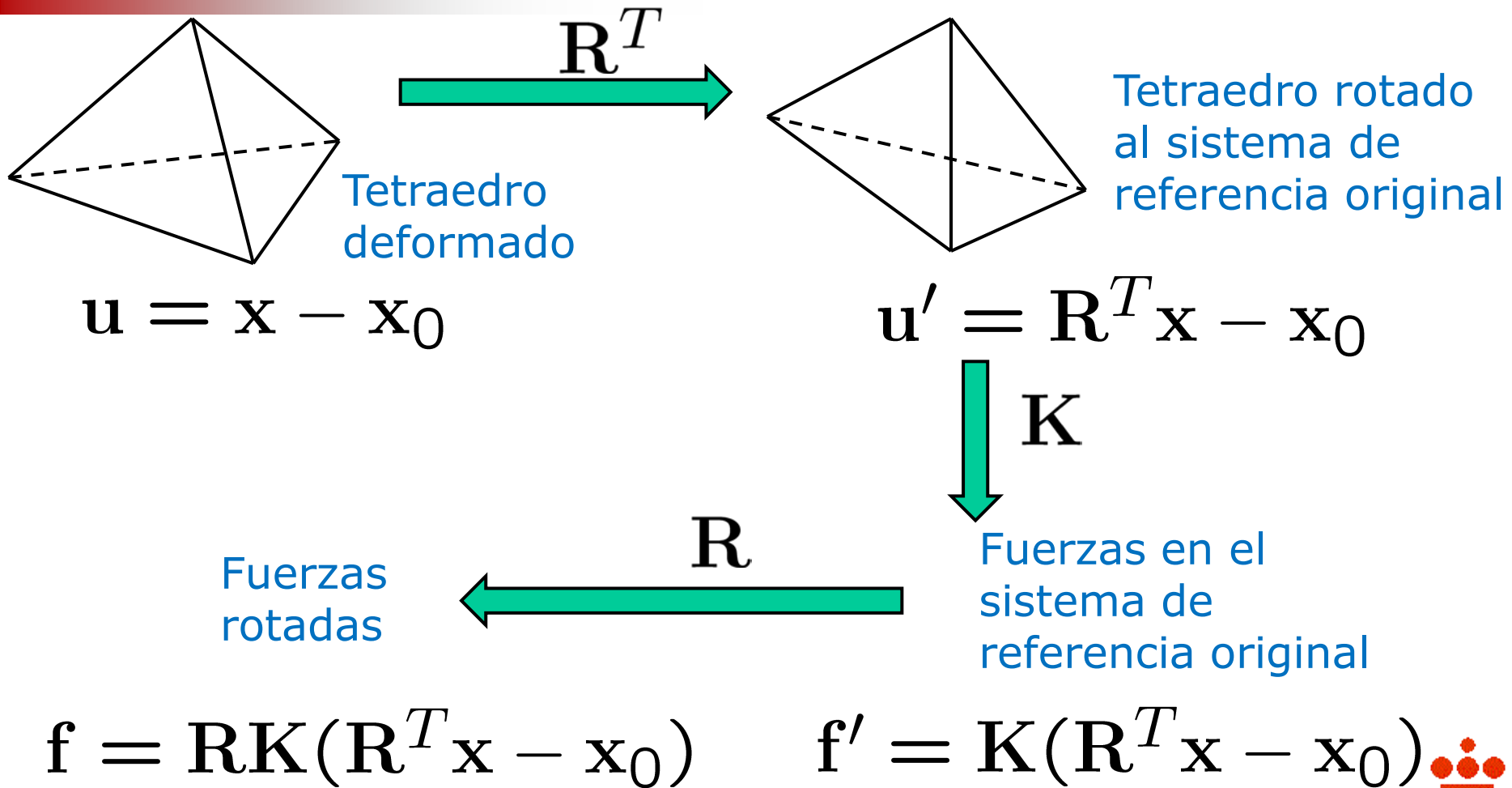
- Requiere linealizar, lo cual puede dar problemas cuando los tetraedros están muy deformados. P.ej., es incorrecto ante tetraedros invertidos.



Grandes Deformaciones

- Opción 2: Elasticidad co-rotacional. Medir la deformación en el sistema de referencia local rotado.
- Se ha de extraer el movimiento de sólido rígido. Puede ser global (*global co-rotational methods*) o local (*stiffness warping*).

Stiffness Warping (Concepto)



Stiffness Warping (Ensamblaje)

- Elasticidad Lineal:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f}_0$$
$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}_i$$

- Stiffness Warping:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f}_0$$
$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{R}_i \mathbf{K}_i \mathbf{R}_i^T \quad \mathbf{f}_0 = \sum_i \mathbf{R}_i \mathbf{K}_i \mathbf{x}_0$$

- El cálculo de la rotación y el ensamblaje se han de realizar en cada paso de simulación.
- Se aplica la rotación a cada bloque 3x3 de la matriz de rigidez.



Stiffness Warping (Rotación)

- Primero se calcula la transformación afín de x_0 a x para los 4 nodos de un tetraedro.

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{t}$$

- Luego se hace la descomposición polar, de manera que se separa la rotación del escalado.

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{S}$$



Plasticidad

- Cuando un material supera un límite de deformación, parte de la deformación pasa a ser permanente (plástica). El cálculo de fuerzas dependerá sólo de la deformación elástica.

$$\epsilon = \epsilon_{elastic} + \epsilon_{plastic}$$

$$\mathbf{f}_{elastic} = f(\epsilon - \epsilon_{plastic})$$

- La deformación plástica se inicializa a 0 y evoluciona conforme a 3 parámetros: máxima deformación elástica (*yield*), máxima deformación plástica (*max*) y coeficiente de flujo plástico (*creep*).

$$\text{if } \|\epsilon\| > \text{yield}, \quad \epsilon_{plastic} + = \text{creep} \cdot \epsilon_{elastic}$$

$$\text{if } \|\epsilon_{plastic}\| > \text{max}, \quad \epsilon_{plastic} * = \text{max} / \|\epsilon_{plastic}\|$$



Fractura

- El material se fractura si la fuerza interna en alguna dirección supera un máximo. La fuerza direccional se puede calcular a partir del tensor de tensión (stress).

$$\mathbf{f}_n = \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{Fuerza direccional}$$

- La dirección de máxima tensión se puede calcular haciendo el análisis de autovalores y autovectores del tensor de tensión.

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \quad \text{Autovalores}$$

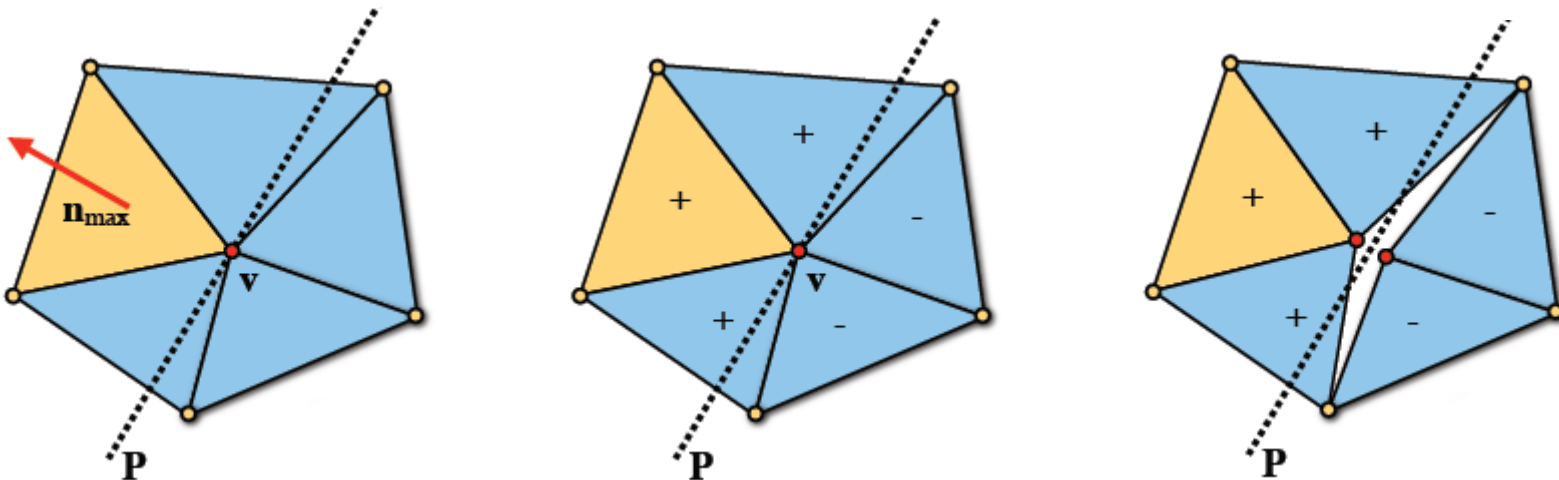
$$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad \text{Autovectores asociados}$$

$$\mathbf{n}_{max} = \mathbf{e}_1 \quad \text{Dirección de tensión max.}$$



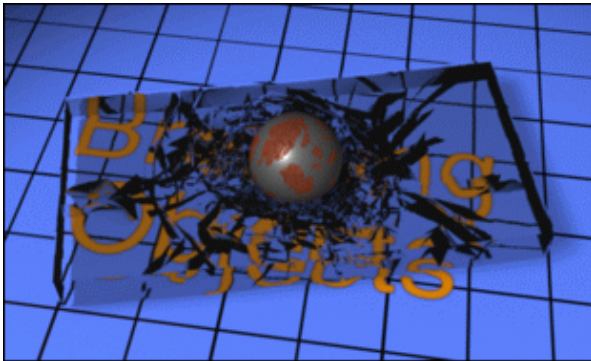
Fractura (Separación de Tetraedros)

- Dependiendo del modelo de deformación, la tensión se puede calcular por tetraedro (modelo lineal) o por nodo (modelo no-lineal).
- Cuando la tensión supera el umbral, se selecciona un nodo por donde se va a fracturar. La superficie de fractura es perpendicular al autovector de tensión máxima, y se separan tetraedros a un lado y otro.

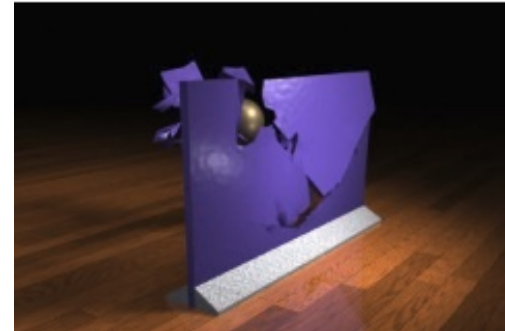


Fractura

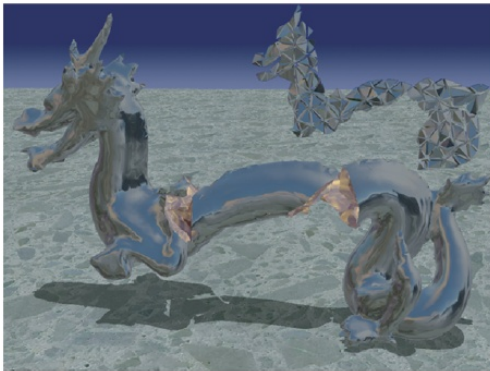
- Existen muchos algoritmos para determinar cómo fracturar la malla a partir de la tensión máxima.



Animation of brittle fracture [O'Brien & Hodgins 1999]



Animation of ductile fracture [O'Brien et al. 2002]



Interactive virtual materials [Müller & Gross 2004]



Fracture for videogames [Parker & O'Brien 2009]

Referencias Principales

- K.-J. Bathe, "*Finite Element Procedures*", Prentice Hall, 1995.
- T. Hughes, "*The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*", Dover Publications, 2000.
- M. Müller, M. Gross. "*Interactive Virtual Materials*", Graphics Interface 2004.



Otros...

- Usar mallas embebidas. Separa la complejidad de la superficie de la discretización de la deformación.
- Mallas embebidas con funciones de forma complejas. Homogeneización [Nesme SIGGRAPH 2009, Karevych SIGGRAPH 2009]
- Remallado para corte y fractura, o cortar sin remallar (x-FEM, discontinuous Galerkin...) [Jerabkova IEEE CG&A 2009, Kaufmann SCA 2008]
- Simulación de viscoplasticidad. Remallado continuo y transferencia de variables [Bargteil SIGGRAPH 2007]
- Captura y modelado de materiales no lineales [Bickel SIGGRAPH 2009]
- Simulación con contacto [Otaduy Eurographics 2009]

