

Modelos Masa-Muelle

Miguel Ángel Otaduy

Animación Avanzada
23 de Enero de 2014



Ejemplo Masa-Muelle



Receta para una Simulación

- ¿Qué queremos simular? ¿Qué propiedades/efectos?
- Diseñar el modelo.
- Escribir ecuaciones diferenciales.
- Discretizar las ecuaciones.
- Añadir interacción.
- Simular!!



Receta para una Simulación

- ¿Qué queremos simular? **Objetos elásticos.**
- Diseñar el modelo. **Masa-muelle.**
- Escribir ecuaciones diferenciales. **Ley de Newton.**
- Discretizar las ecuaciones. **Integración de ODEs.**
- Añadir interacción. **Tratamiento de colisiones.**
- Simular!!



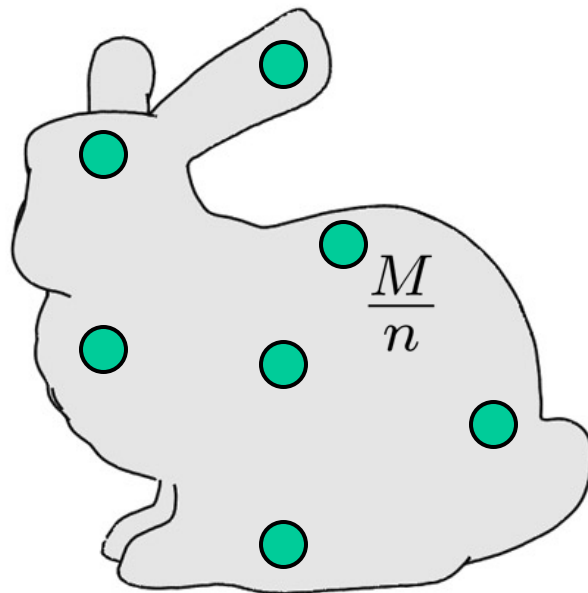
Índice

- Modelo masa-muelle
 - Leyes de Newton y Hook
 - Muelle 1D, muelle 3D
 - Formulación energética.
 - Mallado.
 - Formulación multidimensional.
 - Código orientado a objetos.
 - Amortiguamiento.
 - Muelles generalizados y aplicaciones.

Masa-Muelle: Propiedades

1. Masa/Inercia

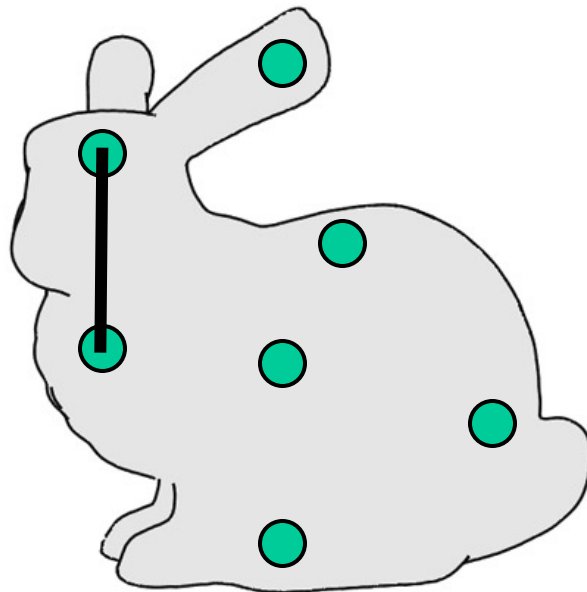
- Densidad: masa distribuida por todo el objeto
- Nodos: masa concentrada en una serie de puntos
- Masa total: M , Número de nodos: n , Masa nodo: $m = \frac{M}{n}$



Masa-Muelle: Propiedades

2. Elasticidad

- Al deformar el objeto, almacena energía. El objeto vuelve a su estado original. Cuanta mayor deformación, más fuerza hay que realizar.
- Comportamiento clásico de un muelle.
- Los muelles entre nodos modelan el comportamiento elástico.
- Rigidez: k
- Longitud en reposo: L_0



2ª Ley de Newton

- Ecuación diferencial que regirá el comportamiento dinámico.
- Ecuación para un nodo:

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \sum \mathbf{F} \quad \text{Ec. vectorial}$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}$$

Aceleración

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum F_x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum F_y$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum F_z$$

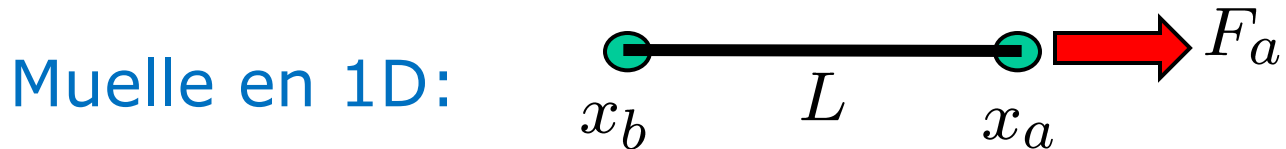
3 Ecs. escalares



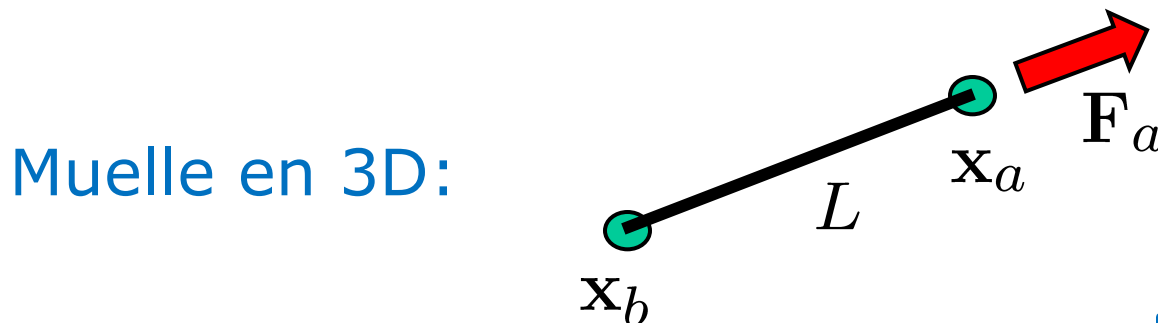
Ley de Hooke

Fuerza Elástica Lineal

- Fuerza dependiente de la deformación:

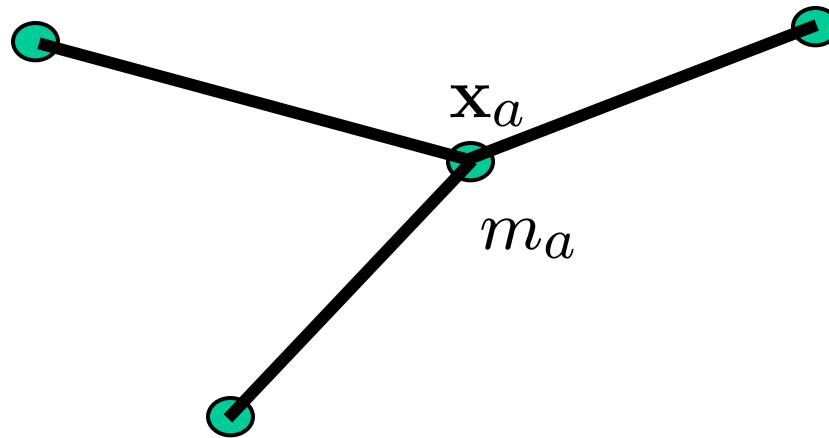


$$F_a = -k \cdot (L - L_0) \frac{x_a - x_b}{L}$$



$$\mathbf{F}_a = \underbrace{-k \cdot (L - L_0)}_{\text{Magnitud}} \underbrace{\frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{L}}_{\text{Dirección}}$$

Todo junto...

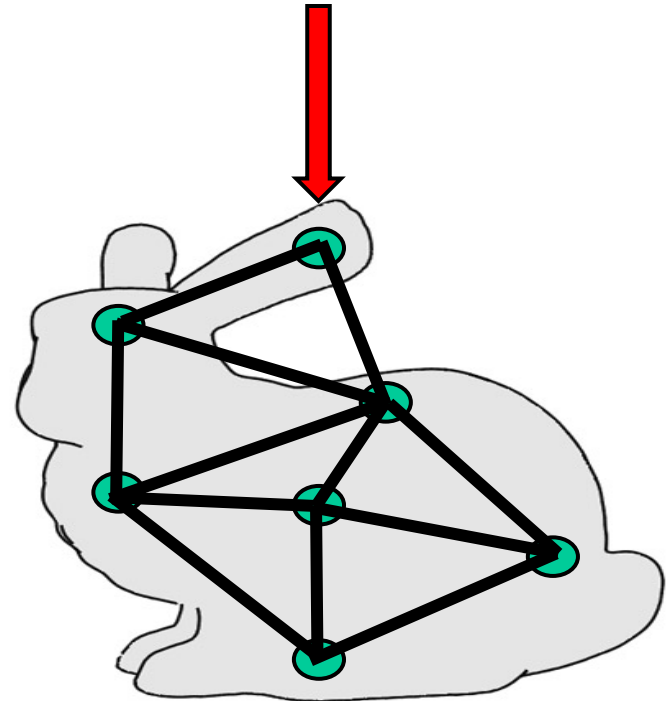
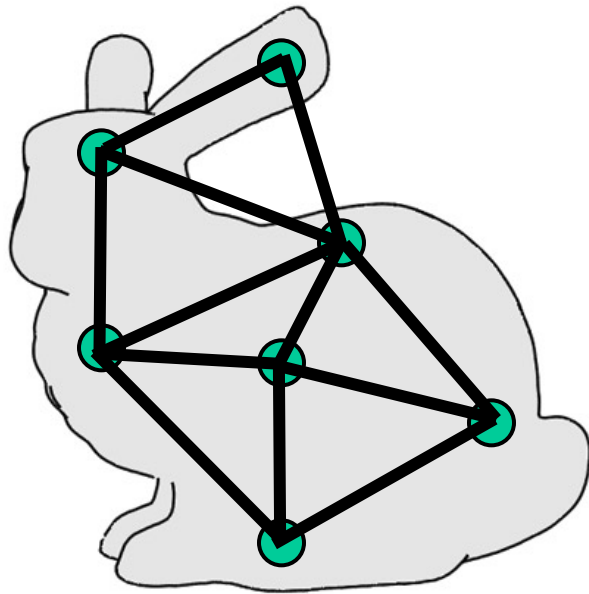


$$m_a \frac{d^2 \mathbf{x}_a}{dt^2} = m_a \mathbf{g} + \sum \mathbf{F}_i$$

$$\mathbf{F}_i = -k \cdot (L_i - L_{i0}) \frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_i}{L_i}$$

(Una ecuación similar para cada nodo)

Contacto Externo



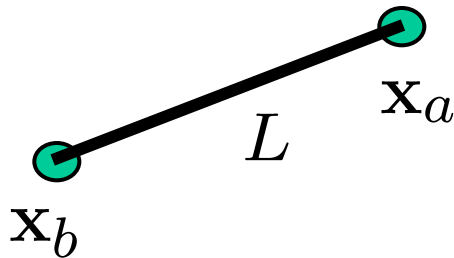
Pregunta 1: ¿Cómo se puede modelar el contacto?

- Mediante fuerzas sobre los nodos.

Pregunta 2: Si el conejo se ha deformado pero no se mueve, ¿cómo son las fuerzas?

- Han de sumar 0 en todos los nodos (equilibrio)

Energía Elástica



$$E = \frac{1}{2}k(L - L_0)^2$$

Pregunta: La energía elástica es una función escalar, pero ¿en qué dominio está definida? Es decir, ¿de qué variables depende (en 1D y 3D)?

$$E(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b) : \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}$$

Energía Elástica

- La fuerza se puede definir como el gradiente negativo de la energía.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_a &= -\nabla_{\mathbf{x}_a} E \\ &= -k \cdot (L - L_0) \nabla_{\mathbf{x}_a} L\end{aligned}$$

$$L = \|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b\|$$

$$L^2 = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)^T (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$$

$$2 \cdot L \nabla_{\mathbf{x}_a} L = 2(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}_a} L = \frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{L}$$

¡Cuidado con el gradiente! Si buscamos la fuerza sobre un nodo, el gradiente representa la derivada con respecto a la posición de ese nodo.



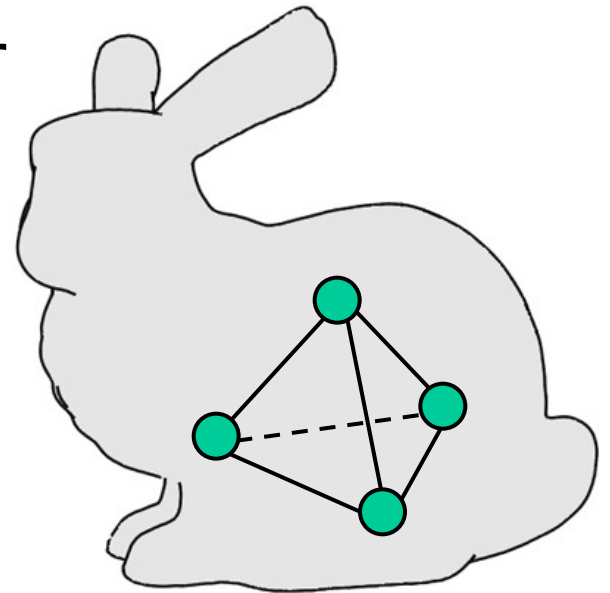
Fuerzas y Energías

- ¡Formulación muy general!
- Idea general:
 - Queremos conservar una propiedad durante la simulación (p.ej., que la altura media de los alumnos sea 2m).
 - Definimos una energía que es mínima si la propiedad se cumple y crece según nos distanciamos de ella.
 - El gradiente negativo nos da una fuerza que lleva la simulación hacia la propiedad.
 - Más en el tema de Restricciones.
- Ver método soft-constraints para simulación [Baraff and Witkin 1998].
- Ver 'Position-based dynamics' [Müller et al. 2007] para simulación quasi-estática.



Mallado

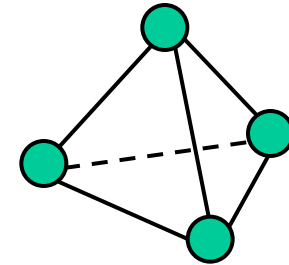
- ¿Cómo distribuir nodos y muelles?
- Para un objeto volumétrico, hacer un mallado del volumen en tetraedros (ver refs. al final). Situar nodos en los nodos del mallado, y muelles en las aristas.
- Los nodos se pueden distribuir de manera no uniforme, poniendo más nodos donde sea necesario más detalle.



Mallado

- Masas de nodos:

- Calcular la masa de un tetraedro asumiendo densidad constante.
- Asignar $\frac{1}{4}$ de la masa a cada nodo.



$$m_{tet} = \rho \cdot Vol_{tet}$$

$$m_{nodo} = \sum_{i \in tets} \frac{1}{4} m_{tet}$$

- Rigideces de muelles:

- Energía independiente del mallado.
- Asociar un volumen a cada muelle, siendo la suma de volúmenes igual al volumen total.

$$E = \frac{1}{2} k (L - L_0)^2$$

$$E = \frac{1}{2} k' \frac{Vol}{L_0^2} (L - L_0)^2$$

k' es un valor de rigidez independiente del mallado

Formulación Multidimensional

- Un vector agrupa la posición de todos los nodos:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cdots \\ \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_{i+1} \\ \cdots \end{pmatrix}_{3n \times 1}$$

- Energía elástica total (suma de energías de muelles):

$$E = \sum E_i$$

- 2ª Ley de Newton en forma vectorial:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = -\nabla_{\mathbf{x}}E + \mathbf{F}$$



Formulación Multidimensional

- 2ª Ley de Newton en forma vectorial:

$$M\ddot{x} = -\nabla_x E + F$$

Matriz
de masas

Gradiente de
la energía

Otras fuerzas
(gravedad, etc.)

Pregunta 1: ¿Qué dimensión y qué valores tiene la matriz de masas?

- Masas de los nodos en la diagonal.

Ejercicio: Calcular la fuerza elástica para un triángulo (3 nodos y 3 muelles)

Código Object-Oriented (1)

```
class node {
    float mass;
    vec3 x, v, a, F;
    vector<spring*> springs;

    void calcAcceleration();
}
```

```
class spring {
    float stiffness;
    float length;
    vec3 F;
    node *na, *nb;

    vec3 getForce(node n);
}
```

```
for each node
    node.F = 0;
    for each spring in node.springs
        node.F += spring.getForce(node);
    node.calcAcceleration();
```



Código Object-Oriented (2)

```
class node {  
    float mass;  
    vec3 x, v, a, F;  
  
    void calcAcceleration();  
}
```

```
class spring {  
    float stiffness;  
    float length;  
    vec3 F;  
    node *na, *nb;  
  
    void calcForce();  
}
```

```
for each node  
    node.F = 0;  
  
for each spring  
    spring.calcForce();  
    spring.na.F += spring.F;  
    spring.nb.F -= spring.F;  
  
for each node  
    node.calcAcceleration();
```

Con mallas, suele haber dos opciones:
a) calcular y distribuir a nodos
b) bucles anidados en los nodos



Amortiguamiento

- En los nodos:

$$\mathbf{F}_a = -d \cdot \dot{\mathbf{x}}_a$$

- En los muelles, velocidad relativa:

$$\mathbf{F}_a = -d \cdot (\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}_b)$$

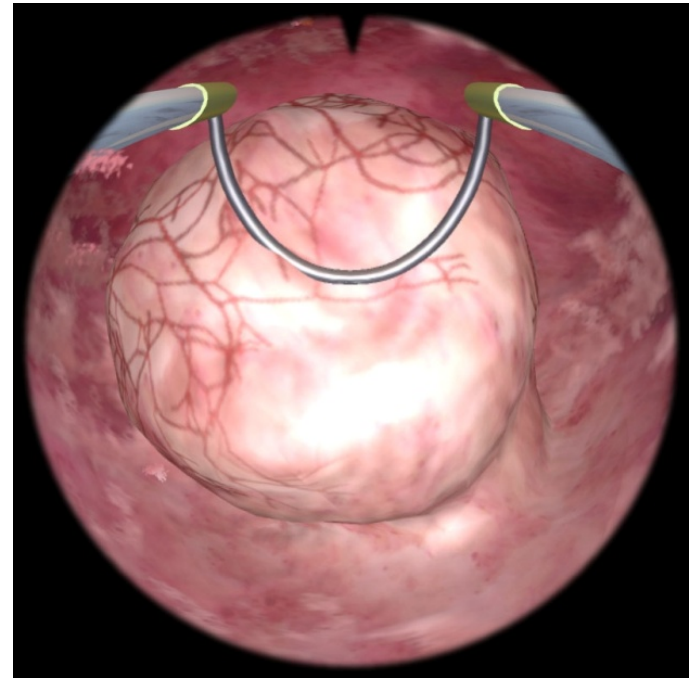
- En los muelles, velocidad proyectada:

$$\mathbf{F}_a = -d \cdot \left((\dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}_b)^T \left(\frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{L} \right) \right) \left(\frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b}{L} \right)$$

Es el mejor de los 3, porque sólo amortigua deformación relativa, no movimiento absoluto.



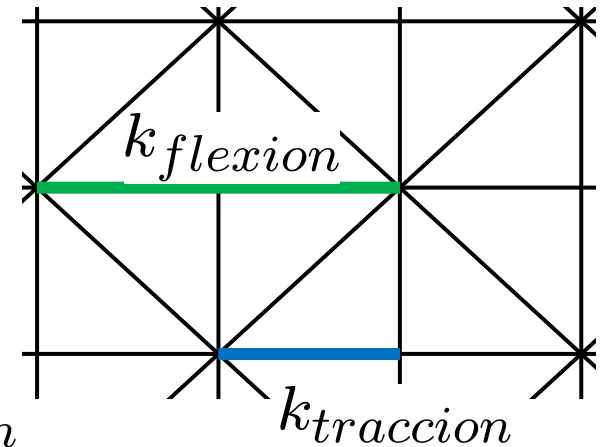
Aplicaciones (Muelles con Extensiones o Generalizados)



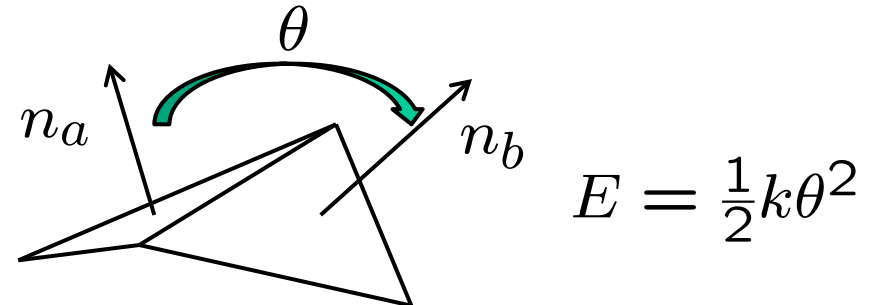
Masa-Muelle en Telas

- Muelles longitudinales:
 - Tracción (nodos contiguos)
 - Flexión (nodos alternos)

$$k_{traccion} \gg k_{flexion}$$



- Muelles de flexión angulares
Ver [Grinspun et al. 2003]



- Muelles de torsión (para cuerdas)
Ver [Selle et al. 2008] para modelos más avanzados



Referencias

- Genéricas:
 - Notas de Baraff y Witkin.
 - Libro de Erleben.
- Modelos masa-muelle avanzados:
 - 'A mass-spring model for hair simulation'. A. Selle et al., SIGGRAPH 2008.
 - 'Discrete shells'. E. Grinspun et al., SCA 2003.
- Generalización de modelos de energía:
 - 'Large steps in cloth simulation'. D. Baraff and A. Witkin., SIGGRAPH 1998.
 - 'Position based dynamics'. M. Müller et al., VRIPHYS 2006.



Referencias

- Mallado:
 - ‘Tetrahedral mesh generation for deformable bodies’. Molino et al., Tech report, Stanford.
 - ‘Isosurface stuffing: fast tetrahedral meshes with good dihedral angles’. Labelle and Shewchuk, SIGGRAPH 2007.
- Estimación de parámetros:
 - ‘Identification of spring parameters for deformable object simulation’. Lloyd et al., TVCG 2007.
 - ‘Data-driven estimation of cloth simulation models’. Miguel et al., Eurographics 2012.

